Çözüm 2 ANALİZ II BÜTÜNLEME ÇÖZÜMLER

$y\arctan(x^2) - (x-1)e^{xy^3} = 0$ fonksiyonunun $(1,0)$ noktasındaki teğet ve normal doğrusu denklemlerini bulunuz.

$$\left[\frac{dy}{dx}.\arctan(x^2) + y.\frac{1}{1+x^4}.2x\right] - \left[e^{xy^3} + (x-1)e^{xy^3}\left(y^3 + x\,3y^2\frac{dy}{dx}\right)\right] = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\arctan(x^2) + \frac{2xy}{1+x^4} - e^{xy^3}(1+(x-1)y^3) - (x-1)e^{xy^3}.3xy^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\left[\arctan(x^2) - (x-1)e^{xy^3}3xy^2\right] = e^{xy^3}(1+(x-1)y^3) - \frac{2xy}{1+x^4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{xy^3}(1+(x-1)y^3) - \frac{2xy}{1+x^4}}{\arctan(x^2) - 3(x-1)xy^2e^{xy^3}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,0)} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi} = m_{Teğet} \Rightarrow m_{Normal} = -\frac{\pi}{4}$$

Teğet Doğrusu Denklemi: $y - 0 = \frac{4}{\pi}(x-1)$

Normal Doğrusu Denklemi: $y - 0 = -\frac{\pi}{4}(x-1)$

Çözüm 3.

$x=0$, $e^x = 1+x$ denkleminin bir köküdür. Kabul edelim ki x_0 bu denklemin sıfırdan farklı bir kökü olsun. O halde $e^{x_0} - x_0 - 1 = 0$ olur.
Şimdi $f(x) = e^x - x - 1$ fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyon $[0,x_0]$ aralığında sürekli, $(0,x_0)$ aralığında türevlenebilirdir. Ayrıca $f(x_0) = f(0) = 0$ olduğundan Rolle teoreminin koşulları sağlanır. Böylece

$$f'(c) = e^c - 1 = 0$$

olacak şekilde $\exists c \in (0,x_0)$ vardır. Ancak

$$e^c - 1 = 0 \Rightarrow e^c = 1 \Rightarrow c = 0 \notin (0,x_0)$$

olur. Bu bir çelişkidir. Bu çelişki $x_0 \neq 0$ ın $e^x = 1+x$ denkleminin kökü kabul edilmesinden kaynaklanmıştır. O halde denklemin sıfırdan farklı kökü yoktur.

Çözüm 6.

$f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin 2x$ fonksiyonu verilsin. $[0, 2\pi]$ aralığını 6 eşit parçaya bölerek oluşturulan P bölüntüsü için $A(f,P)$ alt toplamını bulunuz.

<u>Çözüm:</u> $n = 6$

Alt aralıklar: $\left[0, \frac{\pi}{3}\right], \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right], \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right], \left[\pi, \frac{4\pi}{3}\right], \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right], \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_4 = \Delta x_5 = \Delta x_6 = \frac{\pi}{3}$$

$$P = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$$

$f'(x) = 2\cos 2x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2}, \; 2x = \frac{3\pi}{2}, \; 2x = \frac{5\pi}{2}, \; 2x = \frac{7\pi}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \; x = \frac{3\pi}{4}, \; x = \frac{5\pi}{4}, \; x = \frac{7\pi}{4}$

x		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f'(x)$	+	0	−		−		−	0	+		+	0	−		−		−	0	+	
	↗		↘		↘		↘		↗		↗		↘		↘		↘		↗	

$x = \frac{\pi}{4}$ yerel max. nokta

$x = \frac{3\pi}{4}$ yerel min. nokta

$x = \frac{5\pi}{4}$ yerel max. nokta

$x = \frac{7\pi}{4}$ yerel min. nokta

$A(f,P) = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3 + m_4 \Delta x_4 + m_5 \Delta x_5 + m_6 \Delta x_6$

$m_1 = \inf\left\{f(x) : x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right\} = \min\left\{f(0), f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\} = \min\left\{0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = 0$

$m_2 = \inf\left\{f(x) : x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]\right\} = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$m_3 = \inf\left\{f(x) : x \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]\right\} = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$

$m_4 = \inf\left\{f(x) : x \in \left[\pi, \frac{4\pi}{3}\right]\right\} = \min\left\{f(\pi), f\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right\} = \min\left\{0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = 0$

$m_5 = \inf\left\{f(x) : x \in \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]\right\} = f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$m_6 = \inf\left\{f(x) : x \in \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]\right\} = f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -1$

$$A(f,P) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(-2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

$\boxed{\text{Çözüm 3}}$

3) $$\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = \int \frac{x-1+1+1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$$

$$= \underbrace{\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx}_{I} + \underbrace{\int \frac{2}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx}_{J}$$

yazılır.

I integralinde $u=-x^2+2x$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$du=(-2x+2)\,dx = -2(x-1)\,dx$

olup

$$I = \int \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = -\sqrt{u}+c_1 = -\sqrt{-x^2+2x}+c_1$$

bulunur.

$$J = 2\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = 2\int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-2x+1-1)}}$$

$$= 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$$= 2\arcsin(x-1)+c_2$$

olup $c=c_1+c_2$ denirse

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = -\sqrt{-x^2+2x} + 2\arcsin(x-1) + c$$

elde edilir.

Çözüm 4.

$$\lim_{x\to\infty} x^3\cdot\left(\arctan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x^3}\right)-3^{3/x^3}\right)$$

$$\overset{(\infty\cdot 0)}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\arctan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x^3}\right)-3^{3/x^3}}{\frac{1}{x^3}}$$

$$\underset{\frac{1}{x^3}=u}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{u\to 0}\frac{\arctan\left(\frac{\pi}{4}+u\right)-3^{3u}}{u}$$

$$\underset{L.H}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{4}+u\right)^2}-3^{3u}\cdot 3\cdot\ln 3}{1}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{4}+u\right)^2}-(\ln 3)\cdot 3^{3u+1}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}-3\ln 3$$

Çözüm 1.

$f_1(x)=x$, $f_2(x)=|x-1|-|x+1|$ olsun. $f_2(0)=0$ olduğunda f fonksiyonu $x_0=0$ noktasında tanımsızdır. O halde f, $x_0=0$ noktasında süreksizdir.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x-1|-|x+1|}\,(|x-1|+|x+1|)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\,(|x-1|+|x+1|)}{(x-1)^2-(x+1)^2}$$

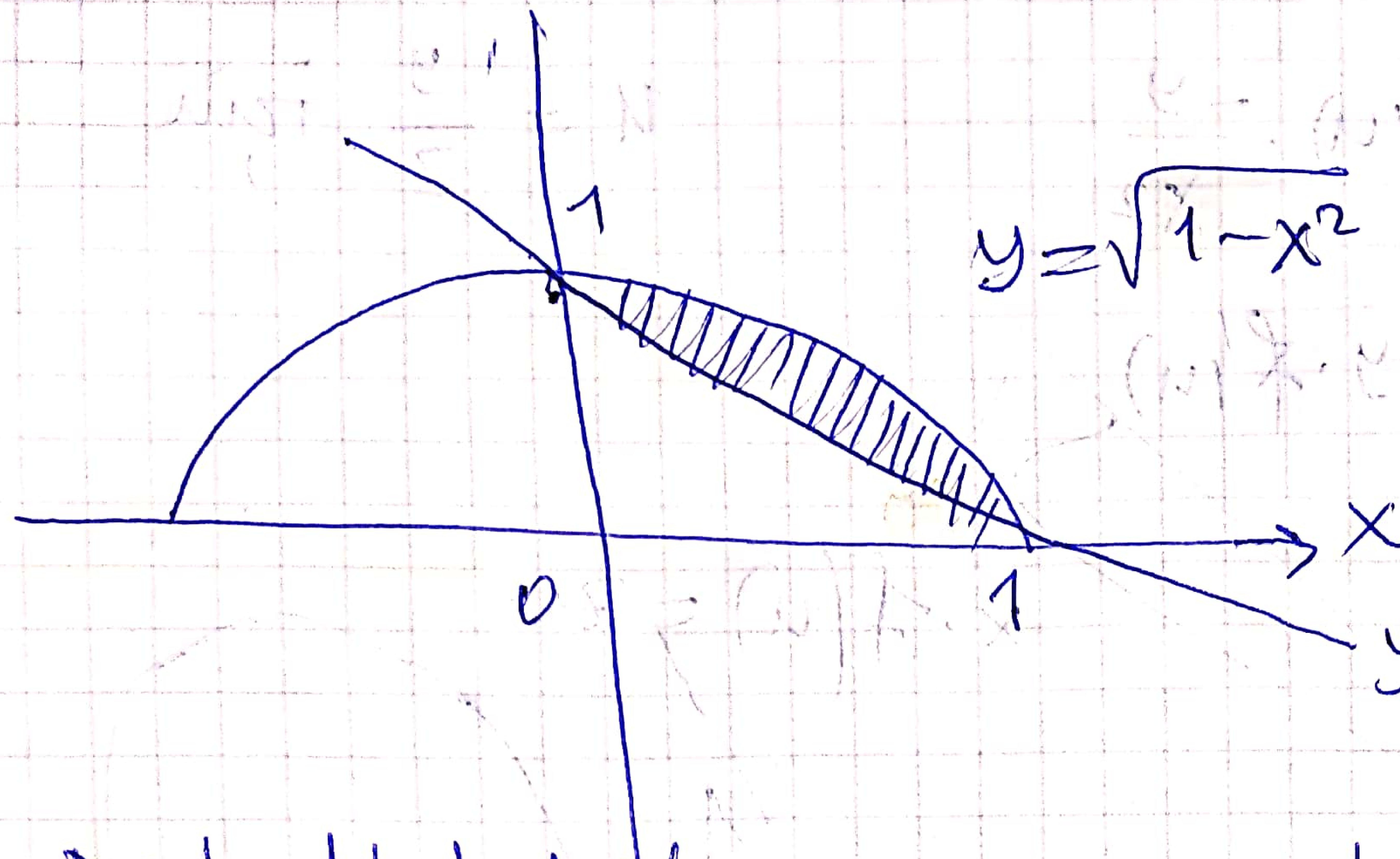
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\,(|x-1|+|x+1|)}{-4x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{|x-1|+|x+1|}{-4}=-\frac{1}{2}$$

bulunur. Eğer f fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x-1|-|x+1|}, & x\neq 0\\[2mm] -\dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa $f(0)=-\frac{1}{2}=\lim_{x\to 0} f(x)$ olduğundan f, $x_0=0$ noktasında sürekli olur.



Disk Metoduile

$$V=\pi\int_0^1\left[(1-x^2)-(1-x)^2\right]dx$$

$$=\pi\int_0^1(1-x^2-1+2x-x^2)\,dx$$

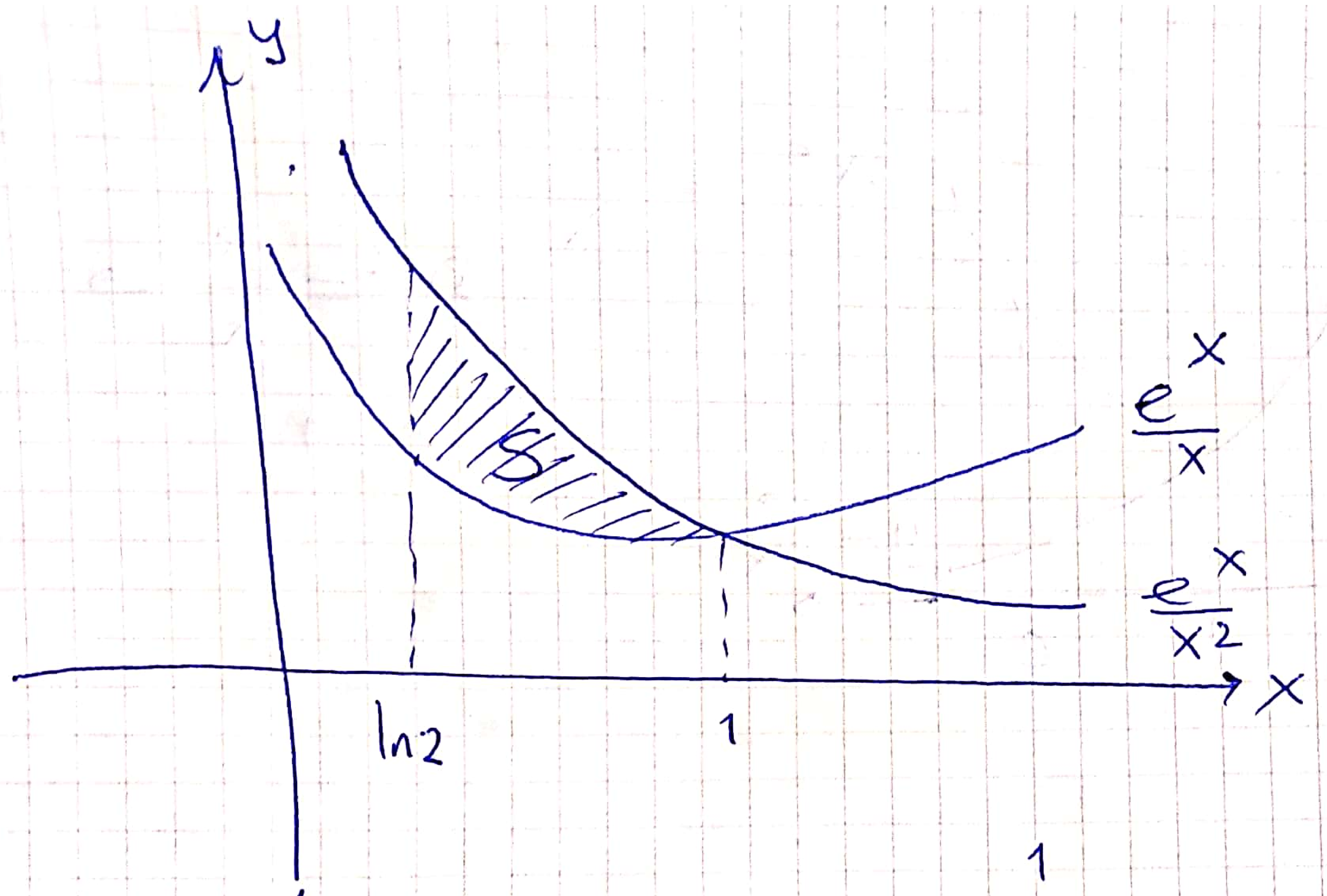
$$=\pi\cdot x^2\Big|_0^1=\pi$$

Kabuk yöntemi

$$V=2\pi\int_0^1 y\left(\sqrt{1-y^2}-1+y\right)dy$$

$$V=2\pi\left[\frac{(1-y^2)^{3/2}}{-2\cdot 3/2}-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_0^1$$

$$=\pi$$



$$S=\int_{\ln 2}^{1}\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{e^x}{x}\right)dx=\underbrace{\int_{\ln 2}^{1}\frac{e^x}{x^2}dx}_{I}-\underbrace{\int_{\ln 2}^{1}\frac{e^x}{x}dx}_{II}$$

$I=\int_{\ln 2}^{1}\frac{e^x}{x^2}dx$ için $u=e^x$ $dv=\frac{1}{x^2}dx$ alırsak

$du=e^x\cdot dx$ $v=\frac{-1}{x}$ ile

$I=\int_{\ln 2}^{1}\frac{e^x}{x^2}dx=-\frac{e^x}{x}\Big|_{\ln 2}^{1}+\int_{\ln 2}^{1}\frac{e^x}{x}dx$ ifadesi S-de yazılırsa

$$S=I-II=-\frac{e^x}{x}\Big|_{\ln 2}^{1}+\cancel{\int_{\ln 2}^{1}\frac{e^x}{x}dx}-\cancel{\int_{\ln 2}^{1}\frac{e^x}{x}dx}$$

$$=-\frac{e}{1}+\frac{e^{\ln 2}}{\ln 2}=\frac{2}{\ln 2}-e$$